une préférence à ce dernier, le lecteur découvrira les raisons de la discrétion de l'auteure en ce qui concerne Julia ; pour Montel c'est un peu moins clair, mais sa personnalité se dévoilera, au moins partiellement, à la lecture des lettres données dans l'appendice.

Plus d'une vingtaine de pages donne des références bibliographiques : on pourra s'étonner de trouver les noms d'écrivains comme Claude Simon, Erich Maria Remarque, Louis Aragon, Henri Barbusse. Lisez le livre et vous comprendrez !

À la fin de l'ouvrage, une douzaine de pages donne un index particulièrement complet et très facile à lire et à exploiter ; en plus des termes techniques utiles à un lecteur non averti, on peut y trouver la plupart des noms de mathématiciens qui ont fait avancer les mathématiques sur une centaine d'années qui s'étalent de la fin du XIX^{e} siècle jusqu'au trois-quarts du XX^{e} siècle.

Un bien beau livre que je recommande chaleureusement. Michèle pour quelle date est programmé le suivant ?

Gérard Tronel,
Université Paris VI

Subsystems of Second Order Arithmetic (Second Edition)
Stephen G. Simpson
ASL, Perspectives in Logic, 2009. 464 p. ISBN : 978-0-521-88439-6. 50€

L'ouvrage, qui est une réédition d'un livre publié en 1999 et rapidement épuisé, s'adresse aussi bien aux spécialistes de logique qu'aux mathématiciens non spécialistes (voire philosophes) intéressés par les problèmes des fondements des mathématiques. À travers les sous-systèmes de l'arithmétique du second ordre (Z_2), deux thèmes sont étudiés dans les deux moitiés de l'ouvrage : les *reverse mathematics*, et les modèles des sous-systèmes de Z_2.

Le programme des *reverse mathematics* (terme que je propose de traduire en français par « mathématiques à rebours »), avec lequel la première édition de ce livre est presque devenue synonyme, consiste à déterminer la force logique exacte des systèmes d'axiomes nécessaires pour prouver un théorème mathématique en cherchant à remonter du théorème vers les axiomes : si la théorie T prouve P et que réciproquement tous les axiomes de T sont prouvables, dans une théorie de base T_0 plus faible que T, à partir de P, on peut dire que (au-dessus de T_0) la théorie T est précisément celle qui a la force logique pour prouver P. On peut en trouver une préfiguration dans la démonstration de l'équivalence du lemme de Zorn avec l'axiome du choix, mais le livre de Simpson s'intéresse à des théorèmes de mathématiques « ordinaires » et non de théorie des ensembles.

Le cadre général choisi est celui de Z_2, c'est-à-dire la théorie logique qui n'admet que deux sortes d'objets, les entiers naturels et les ensembles d'entiers naturels, et dont les axiomes sont ceux de Peano (l'axiome de récurrence étant formulé sur les ensembles : $\forall X\,(0 \in X \;\wedge\; \forall n\,(n \in X \Rightarrow (n+1) \in X) \;\Rightarrow \forall n\,(n \in X)))$ ainsi que le schéma de compréhension qui permet de former l'ensemble $\{n : \varphi(n)\}$ pour toute proprité φ des entiers naturels (y compris si elle contient des quantificateurs portant sur les ensembles). Une première thèse sous-jacente dans ce livre est celle que de très nombreux théorèmes usuels des mathématiques peuvent se reformuler dans ce langage (cela peut demander un certain travail de codage : un espace métrique séparable, par exemple, sera vu comme la fonction distance sur une partie dénombrable de celui-ci, identifiée à une partie de $\mathbb{N}$) ; et que, lorsque c'est le cas, ce sont alors des théorèmes de Z_2 qui sont, en fait, démontrables dans des théories beaucoup plus faibles.

L'auteur définit cinq principaux sous-systèmes de Z_2, généralement en restreignant le schéma de compréhension : une théorie de base nommée RCA_0 (pour « Recursive Comprehension Arithmetic ») et quatre extensions de celle-ci appelées, dans l'ordre de force logique croissante, WKL_0 (« Weak König's Lemma »), ACA_0 (« Arithmetical Comprehension »), ATR_0 (« Autonomous Transfinite Recursion ») et Π^1_1-CA_0 (« Π^1_1-Comprehension »). Philosophiquement, l'auteur propose de les considérer comme typiques des raisonnements respectivement du constructivisme, du réductionnisme finitiste, du prédicativisme, du « réductionnisme prédicativiste », et d'un certain niveau d'imprédicativisme. La première partie de l'ouvrage est consacrée, à travers les cinq chapitres qui suivent l'introduction, à l'étude de ces cinq principaux systèmes, et des mathématiques directes et à rebours pour eux.

Pour de nombreux théorèmes mathématiques usuels (issus de l'algèbre, l'analyse réelle, etc.), l'auteur démontre l'équivalence du théorème avec une de ces théories : c'est-à-dire qu'il démontre le théorème dans la théorie (sens « direct »), puis, pour les cas autres que le système de base RCA_0 il démontre les axiomes de la théorie à partir du théorème considéré (sens « à rebours ») et de RCA_0. À titre d'exemple, je peux mentionner le résultat typique suivant : si la théorie ACA_0 désigne Z_2 dans laquelle le schéma de compréhension est limité aux formules φ arithmétiques (c'est-à-dire ne contenant autant quantificateur sur les ensembles), et si la théorie de base RCA_0 est celle dans laquelle l'axiome de récurrence est exprimé comme un schéma pour les formules arithmétiques Σ^0_1 (c'est-à-dire de la forme $\exists m\,\theta(m)$ où $\theta(m)$ ne porte que des quantificateurs de la forme $\exists k < t$ ou $\forall k < t$ bornés par un terme t) et où le schéma de compréhension est limité aux formules arithmétiques Δ^0_1 (c'est-à-dire qui peuvent être exprimées de façon équivalente comme une formule Σ^0_1 ou comme la négation d'une telle formule), alors le théorème de Bolzano-Weierstrass est équivalent, au-dessus de RCA_0, à la théorie ACA_0. Le théorème du point fixe de Brouwer, lui, est équivalent à WKL_0, c'est-à-dire l'affirmation que tout sous-arbre infini de l'arbre des suites binaires finies a une branche infinie.

La seconde partie de l'ouvrage est plus technique, et consacrée aux modèles des cinq systèmes étudiés dans la première partie. Le dernier chapitre s'intéresse aux modèles généraux et, à travers eux, aux fragments du premier ordre des systèmes considérés : l'auteur y montre notamment que RCA_0 et WKL_0 prouvent les mêmes théorèmes du premier ordre, et que les théorèmes du premier ordre prouvés par ACA_0 sont ceux de l'arithmétique de Peano usuelle ; il esquisse de plus le calcul des ordinaux de théorie de la démonstration « à la Gentzen » des cinq théories considérées. L'avant-dernier chapitre est consacré aux ω-modèles (ceux dont la partie du premier ordre est standard), et leur rapport avec la théorie de la calculabilité et des hyperdegrés : entre autres résultats, il y est démontré que les ensembles récursifs forment le plus petit ω-modèle de RCA_0, et que les ensembles arithmétiques (c'est-à-dire, récursifs dans le *n*-ième saut de Turing absolu pour un certain entier *n*) forment le plus petit ω-modèle de ACA_0. Le chapitre précédent est consacré aux β-modèles, c'est-à-dire aux sous-modèles Σ^1_1-élémentaires du modèle standard ω : l'auteur démontre par exemple qu'il existe un plus petit β-modèle de Π^1_1-CA_0, formé des ensembles récursifs dans le *n*-ième hypersaut absolu pour un certain entier *n* ; au-delà de ce résultat, il décrit la construction de la hiérarchie constructible des parties de ω à l'intérieur de ATR_0, et esquisse le lien entre β-modèles de sous-systèmes forts de Z_2 et théorie des ensembles admissibles ou théorie de la structure fine de *L*.

L'ouvrage se conclut par un appendice qui énonce, sans démonstration mais avec des références précises, des résultats supplémentaires, par exemple sur la question de l'affaiblissement de la théorie de base.

Ce livre m'a frappé par son exhaustivité : on croirait en l'ayant lu tout savoir sur les sous-systèmes de Z_2 tant il est difficile de trouver une question qui n'ait pas été traitée, sinon directement dans le corps d'un chapitre, au moins dans une des références suggérées à la fin de chaque section. Les démonstrations sont – malgré une certaine concision – précises et tout à fait claires. Le plan général permet de retrouver facilement le résultat qu'on cherche, et les tableaux synoptiques du premier chapitre sont également très utiles pour se repérer parmi les nombreux sujets traités (on regrette seulement l'absence d'un schéma récapitulant les nombreuses théories introduites au-delà des cinq principales, avec leurs définitions et liens logiques).

Le contenu est suffisamment « self-contained » et clairement présenté pour être abordable en ayant des connaissances minimales en logique. Au-delà de la seule précision mathématique, l'exposition donne une assez bonne intuition de la manière dont fonctionnent les théories étudiées.

L'auteur s'était donné pour tâche de répondre à la « question principale » : « quels axiomes d'existence d'ensembles sont nécessaires pour prouver les théorèmes des mathématiques ordinaires et non ensemblistes ? ». Ce défi me semble avoir été relevé avec succès, même si je le trouve plus convaincant dans la partie concernant les trois théories les plus faibles que pour les deux dernières (dont les théorèmes portent essentiellement sur la théorie descriptive des ensembles). En tout état de cause, les résultats présentés dans les deux parties m'ont paru intéressants et souvent surprenants.

Mon principal regret concerne l'absence de nouveautés dans cette seconde édition : l'auteur n'a fait que corriger des fautes typographiques et rafraîchir la bibliographie, alors que les résultats nouveaux qui auraient pu être ajoutés (au moins en appendice) ne manquent pas. Ce n'est pas un reproche grave : le livre reste tout à fait actuel, il trouvera sa place parmi les références dans la bibliothèque de tout spécialiste ou amateur de logique.

David Madore,
Télécom ParisTech