关于"二阶算术体系"一书的书评

Stephen G. Simpson
Pennsylvania State University
Subsystems of Second Order Arithmetic
1999, 445pp.
Hardcover
ISBN 3-540-64882-8
Springer-Verlag
二阶算术体系
S. G. 辛普森　著

本书是施普林格出版社出版的"数理逻辑概观"系列中的一本专著。这本书是作者花费了近十五年的心血的结晶。也是以作者和 H. Friedman 为首的学派在过去二十年里有关数学基础研究，尤其是有关如何部分地实现希尔伯特规划 (Hilbert's program) 而不懈努力工作的系统综合报告，书中有许多首次公开发表的研究结果，详尽的参考文献以及许多悬而未决的问题。

这本书所涉及是有关数学基础研究的前沿课题：哪些逻辑命题是与经典数学相适应的公理？或者说，哪些有关一定集合的存在性的命题是证明许多已知经典数学定理所必不可少的？对我们当前理解有关核心数学的逻辑结构而言，这本书为我们提供了一种基本形式系统：二阶算术系列子系统。什么是二阶算术系统？我们通常所说的一阶算术系统是有关自然数的基本理论的皮亚诺算术系统。在这个系统中除了我们所熟知的算术运算和归纳法原理外，所涉及的变量只有代表自然数的变量。而二阶算术系统则是在一阶算术系统之上引入一类二阶变量以代表自然数集的子集合。这里所说的"阶"是指变量的层次。本书把二阶算术系统分成逻辑功能逐渐增强的一系列子系统。从最基本的子系统 RCA_0 出发，将核心数学中的一些基本定理在这个系列体系中进行层次定位：一方面在相应的子系中导出所论及的定理；另一方面，从这一定理出发，推导出相对应的子系统中的公理。用这种方式，为这些基本定理提供了一种逻辑复杂性的度量。

全书共分为四部分，十章。

第一部分由第一章构成。是全书的引导部分，主要定义二阶算术体系。

第二部分由第二到第六章组成。是全书的重点部分。在这一部分，我们看到来自核心数学诸如可分完备度量空间和巴纳赫空间，可数代数结构及向量空间，常微分方程，不动点理论，无穷搏弈论，组合理论等等众多领域，分支的一些基本定理的层次定位。

第三部分由第七到第九章组成。是全书的核心部分。这一部分用数理逻辑的工具来揭示本书所展示的二阶算术体系逻辑层次的自然性，合理性，必要性和独立性。

第四部分为本书的附录部分。在这里，有兴趣的读者可以找到进入前沿的一些研究问题。

冯琦，研究员（中国科学院数学研究所）
Qi Feng, Professor (Institute of Mathematics, the Chinese Academy of Sciences)