Arch. math. Logik 25 (1985), 45–65

NICHTBEWEISBARKEIT VON GEWISSEN KOMBINATORISCHEN EIGENSCHAFTEN ENDLICHER BÄUME *

Stephen G. Simpson[1]

Unprovability of certain combinatorial properties of finite trees

Abstract. In this paper we exposit some as yet unpublished results of Harvey Friedman. These results provide the most dramatic examples so far known of mathematically meaningful theorems of finite combinatorics which are unprovable in certain logical systems. The relevant logical systems, ATR_0 and $\Pi^1_1-CA_0$, are well known as relatively strong fragments of second order arithmetic. The unprovable combinatorial theorems are concerned with embeddability properties of finite trees. Friedman's method is based in part of the existence of a close relationship between finite trees on the one hand, and systems of ordinal notations which occur in Gentzen-style proof theory on the other.

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit stellen wir gewisse bis jetzt nicht veröffentlichte Forschungsergebnisse von Harvey Friedman vor. Diese Ergebnisse liefern die eindrucksvollsten bis jetzt gefundenen Beispiele von mathematisch bedeutsamen Sätzen der endlichen Kombinatorik, die in gewissen logischen Systemen nicht beweisbar sind. Die betroffenen logischen Systeme ATR_0 und $\Pi^1_1-CA_0$ sind als verhältnismäßig starke Teilsysteme der Arithmetik der zweiten Stufe bekannt. Die nicht beweisbaren kombinatorischen Sätze haben mit Einbettbarkeitseigenschaften endlicher Bäume zu tun. Friedmans Methode gründet sich zum Teil auf eine enge Verbindung zwischen endlichen Bäumen einerseits und den Ordinalzahlbezeichnungssystemen andererseits, die in der an Gentzen anknüpfenden Beweistheorie vorkommen.

Inhalt

---

* Eingegangen am 25.4.1984.

[1] Partially supported by NSF grant MCS 8107867. Also partially supported by a grant from the Deutsche Forschungsgemeinschaft, while on sabbatical leave at the University of Munich.

0. Einleitung

Gödels Unvollständigkeitssatz von 1931 stellte fest, daß es in jedem formalen System für die Mathematik nicht entscheidbare endlich-kombinatorische Aussagen gibt. Anders ausgedrückt, in jedem formalen System für die Mathematik gibt es nicht beweisbare, endlich-kombinatorische Sätze.

Obwohl dieses Ergebnis von Gödel recht erstaunlich und bemerkenswert ist, ist manchmal bemängelt worden, daß Gödels konkrete Beispiele nicht beweisbarer endlich-kombinatorischer Sätze mathematisch etwas künstlich sind, da sie eine Kodierung der logischen Syntax enthalten. Dieser Einwand ist durchaus ernst zu nehmen, da es eben denkbar ist, daß alle mathematisch bedeutsamen endlich-kombinatorischen Sätze beweisbar sind.

Die Lage ist durch die Arbeit von Paris und Harrington aus dem Jahre 1977 [23] viel klarer geworden. Diese Arbeit lieferte nämlich einen völlig durchsichtigen Satz der endlichen Kombinatorik, eigentlich eine sehr einfache Verstärkung des endlichen Ramseysatzes, der in Z_1 nicht beweisbar ist. (Hier ist Z_1 das bekannte formale System der Arithmetik der ersten Stufe, die sogenannte Peanoarithmetik.) Seit diesem Durchbruch von Paris und Harrington sind mehrere andere Ergebnisse derselben Art erschienen. Besonders bemerkenswert in diesem Zusammenhang waren die Ergebnisse von Kirby und Paris aus dem Jahre 1981 [16]. Auch dabei handelte es sich um mathematisch sehr ansprechende kombinatorische Sätze, die in Z_1 nicht beweisbar sind.

Leider betreffen die eben erwähnten Ergebnisse nur das spezielle formale System Z_1. Was z.B. Z_2, das formale System der Arithmetik der zweiten Stufe anbelangt, bleibt die Lage immer noch völlig unklar. Denn es gibt immer noch keine veröffentlichten Beispiele von mathematisch bedeutsamen Sätzen der endlichen Kombinatorik, die in Z_2 nicht beweisbar sind.

Anstatt das ganze System Z_2 zu untersuchen, ist es naheliegend, Teilsysteme von Z_2 zu betrachten. Für solche Teilsysteme ist die gegenwärtige Lage ein wenig komplizierter. Erstens wurde in den letzten Jahren eine kleine Anzahl Teilsysteme von Z_2 isoliert, die für die Entwicklung der üblichen mathematischen Praxis besonders gut geeignet sind. (Diese Isolierung von wenigen mathematisch bedeutsamen Teilsystemen von Z_2 wurde mit Hilfe des zur Zeit laufenden Forschungsprogramms der sogenannten „Inversen Mathematik" geleistet. Siehe [6, 7, 10, 11, 34–37].) Zweitens hat es sich ergeben, daß nur zwei dieser mathematisch bedeutsamen Teilsysteme von Z_2 echt stärker als Z_1 sind. Diese zwei Teilsysteme heißen ATR_0 und Π_1^1-CA. (Siehe [7, 10, 11, 33–36] und dazu die Erörterungen zu Beginn von den Abschnitten 2. und 3. der vorliegenden Arbeit.) Drittens wurde 1979 in [10] ein mathematisch bedeutsamer endlich-kombinatorischer Satz dargeboten, der in ATR_0 nicht beweisbar ist. Dieser kombinatorische Satz gehört zum Gebiet der endlichen Ramseytheorie, und seine Aussage ist leicht verständlich, wenn auch ein wenig unelegant. Siehe auch Shelah [30].

Aber bis jetzt hatte es außer [10] und [30] keine weiteren mathematisch bedeutsamen Sätze der endlichen Kombinatorik gegeben, die in ATR_0 oder in $\Pi_1^1-CA_0$ nicht beweisbar sind. Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, einige weitere Beispiele solcher Sätze darzustellen. Diese Beispiele, und zwar alle neuen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit, sind Harvey Friedman [8, 9] zu verdanken.

Unsere kombinatorischen Betrachtungen haben ihren Ursprung in gewissen Einbettbarkeitsfragen in der Theorie von endlichen Graphen. Eine Vermutung von Wagner besagt, daß es für jede 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M nur endlich viele minimale, in M nicht homöomorph einbettbare, endliche Graphen gibt. (Hier soll Minimalität in Bezug auf die homöomorphe Einbettbarkeitsrelation verstanden werden.) Eine berühmte Vermutung von Vázsonyi besagt, daß jede Menge endlicher Graphen, die in jedem Knoten den Grad $\leqq 3$ haben, nur endlich viele minimale Elemente hat. Ein berühmter Satz von Kruskal behauptet, daß jede Menge von endlichen Bäumen nur endlich viele minimale Elemente hat. (Hier ist unter einem Baum ein zusammenhängender Graph zu verstehen, der keinen Zykel enthält.) Siehe [18, 19, 21, 22].

Der eben erwähnte Satz von Kruskal ist in ATR_0 nicht beweisbar. Dieses Nichtbeweisbarkeitsergebnis ist das erste Ergebnis von Friedman, das wir in der vorliegenden Arbeit vorstellen werden.

Für unsere Zwecke ist es angemessen, eine leicht veränderte Formulierung von Kruskals Satz zu benutzen. Ein endlicher Baum wird nämlich für uns kein Graph, sondern eine gewisse Art von endlicher, partiell geordneter Menge sein (Definition 1.1). Trotzdem sind der Inhalt unseres Satzes 1.3 und der des oben erwähnten graphentheoretischen Satzes von Kruskal im Grunde genommen identisch.

Das zweite Nichtbeweisbarkeitsergebnis von Friedman betrifft endliche Bäume mit gewisser zusätzlicher Struktur. Den Knoten der Bäume werden Marken aus der endlichen Menge $\{0,1,\ldots,n-1\}$ zugeordnet. Zwischen solchen markierten endlichen Bäumen wird eine gewisse spezielle Einbettbarkeitsrelation definiert. Die Einbettungen müssen Marken erhalten und, ferner, eine gewisse Lückenbedingung erfüllen (Definition 4.1). Dann ergibt sich, daß die entsprechende Verallgemeinerung von Kruskals Satz wahr, aber in $\Pi_1^1-CA_0$ nicht beweisbar ist. Diese Ergebnisse von Friedman werden in den Abschnitten 4 und 5 der vorliegenden Arbeit vorgestellt werden.

Leider gehören Kruskals Satz und Friedmans Verallgemeinerung davon nicht ohne weiteres zum Gebiet der reinen endlichen Kombinatorik. Der Mangel besteht darin, daß diese Sätze einen Quantor über unendliche Mengen enthalten. Aber mit Hilfe des Lemmas von König [17] kann man Kruskals Satz und Friedmans Verallgemeinerung im Endlichen miniaturisieren. Die sich so ergebenden, rein endlich-kombinatorischen Sätze sind allerdings etwas komplizierter als ihre unendlichen Vorbilder. Ihre Aussagen enthalten nämlich eine lineare

Wachstumsbedingung für die Größe der endlichen Bäume. Trotzdem besitzen diese endlich miniaturisierten kombinatorischen Sätze eine gewisse Anmut. Friedmans Hauptergebnis (Sätze 3.2 und 5.16 der vorliegenden Arbeit) ist, daß diese endlich-miniaturisierten Sätze in ATR_0 bzw. Π^1_1-CA_0 nicht beweisbar sind.

Friedmans Methode gründet sich zum Teil auf die Ausnutzung einer gewissen Verbindung zwischen endlichen Bäumen und den Bezeichnungen für Ordinalzahlen, die in der Beweistheorie vorkommen. Die Existenz einer solchen Verbindung wurde schon früher, z.B. von Schmidt [27], bemerkt. Aber Schmidt bekam keine Nichtbeweisbarkeitsergebnisse. Andererseits gibt es eine bemerkenswerte Ähnlichkeit zwischen den markierten Bäumen von Friedman (Definition 4.1) und den Ordinaldiagrammen von Takeuti [38, 39]. (Vgl. auch Definition 5.6.) Der größte Unterschied zwischen Friedmans markierten Bäumen und Takeutis Ordinaldiagrammen ist, daß jeder markierte Baum nur endlich viele Vorgänger hat (Definition 4.1). Die andere wesentliche Komponente von Friedmans Methode ist sein Miniaturisierungsverfahren mit Hilfe einer linearen Wachstumsbedingung (Definition 3.1 und 3.4, Satz 3.5). Diese Idee hat offenbar keinen Vorläufer.

Wir danken Harvey Friedman für die Erlaubnis, die vorliegende Arbeit zu veröffentlichen. Wir danken auch den Mitgliedern des Oberseminars für Mathematische Logik der Universität München, besonders den Herren Buchholz, Jäger, Osswald und Pohlers, für ihre Hilfe bei der Vorbereitung dieser Arbeit.

1. Beweis von Kruskals Satz

1.1 Definition. Ein *endlicher Baum* ist eine endliche, partiell geordnete Menge T, so daß:

(i) T ein kleinstes Element hat (dieses Element heißt die *Wurzel* von T);
(ii) für jedes $b \in T$ die Menge $\{a \in T : a \leqq b\}$ eine total-geordnete Teilmenge von T ist.

1.2 Definition. Für endliche Bäume T_1 und T_2 ist eine *Einbettung* eine eineindeutige Abbildung $f : T_1 \to T_2$, so daß $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ für alle $a, b \in T_1$. (Mit $a \wedge b$ bezeichnen wir das Infinum von a und b.) Mit $T_1 \leqq T_2$ wird die Existenz einer Einbettung $f : T_1 \to T_2$ notiert.

1.3 Kruskals Satz [18]. *Für jede unendliche Folge endlicher Bäume $\langle T_k : k < \omega \rangle$ gibt es Indizes i und j mit $i < j < \omega$ und $T_i \leqq T_j$. (Anders ausgedrückt, es gibt keine unendliche Menge paarweise nicht ineinander einbettbarer endlicher Räume.)*

Für den Beweis von Kruskals Satz brauchen wir die folgende abstrakte Formulierung:

1.4 Definition. Eine *Quasiordnung* ist eine Menge $\mathcal{Q}$ mit einer reflexiven, transitiven, auf $\mathcal{Q}$ definierten Relation $\leqq$. Eine *Wohlquasiordnung* (WQO) ist eine Quasiordnung $\mathcal{Q}$ mit der Eigenschaft, daß es für jede unendliche Folge $\langle Q_k : k<\omega\rangle$ von Elementen $Q_k \in \mathcal{Q}$ Indizes i und j gibt, so daß $i<j<\omega$ und $Q_i \leqq Q_j$.

1.5 Beispiel. Sei $\mathcal{T}$ die Menge aller endlichen Bäume mit der Einbettbarkeitsrelation $\leqq$ von 1.2. Dann ist $\mathcal{T}$ offenbar eine Quasiordnung. Kruskals Satz 1.3 ist die Behauptung $WQO(\mathcal{T})$. Für weitere Entwicklungen der allgemeinen Wohlquasiordnungstheorie siehe [19–21, 31].
Für eine beliebige Quasiordnung $\mathcal{Q}$ heißt eine unendliche Folge $\langle Q_k : k<\omega\rangle$ aus $\mathcal{Q}$ *schlecht*, wenn $Q_i \not\leqq Q_j$ für alle i und j mit $i<j<\omega$ gilt. $\mathcal{Q}$ ist wqo genau dann, wenn sie keine schlechte Folge enthält.

1.6 Lemma (Higman [12]). *Ist $\mathcal{Q}$ eine beliebige WQO, so ist auch $\mathcal{Q}^{<\omega}$ eine WQO. Hier bezeichnet $\mathcal{Q}^{<\omega}$ die Menge aller endlichen Folgen aus $\mathcal{Q}$, quasigeordnet durch*

$$\langle Q_0, Q_1, \dots, Q_{m-1}\rangle \leqq \langle Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_{n-1}\rangle$$

$:\Leftrightarrow \exists i_0, i_1, \dots, i_{m-1}$ *mit* $i_0<i_1<\dots<i_{m-1}<n$ *und* $Q_0 \leqq Q'_{i_0}$, $Q_1 \leqq Q'_{i_1}, \dots, Q_{m-1} \leqq Q'_{i_{m-1}}$.

Beweis. Nehmen wir an, daß $\mathcal{Q}^{<\omega}$ nicht wqo wäre. Dann gäbe es mindestens eine schlechte Folge aus $\mathcal{Q}^{<\omega}$. Wir bilden eine *minimale schlechte Folge* $\langle t_k : k<\omega\rangle$, $t_k \in \mathcal{Q}^{<\omega}$, wie folgt. Sei $t_0 \in \mathcal{Q}^{<\omega}$ minimal, so daß eine schlechte Folge $\langle t'_k : k<\omega\rangle$ mit $t'_0 = t_0$ existiert; dann sei $t_1 \in \mathcal{Q}^{<\omega}$ minimal, so daß eine schlechte Folge $\langle t'_k : k<\omega\rangle$ mit $t'_0=t_0$ und $t'_1=t_1$ existiert; und so weiter.
Es ist klar, daß $t_k \neq \langle\ \rangle$ für jedes $k<\omega$ gilt. Wir setzen

$$t_k = \langle Q_k\rangle\, s_k\,,$$

wobei $Q_k \in \mathcal{Q}$ das erste Element von t_k ist, Dann ist $s_k \in \mathcal{Q}^{<\omega}$, und für die Länge gilt $lh(s_k) = lh(t_k) - 1$.
Wir behaupten, daß die Folge $\langle s_k : k<\omega\rangle$ keine schlechte Teilfolge besitzt. Anderenfalls gäbe es eine schlechte Folge $\langle s_{k_i} : i<\omega\rangle$ mit $k_i<k_j$ für alle i und j mit $i<j<\omega$. Dann wäre die Folge $\langle t_0, t_1, \dots, t_{k_0-1}, s_{k_0}, s_{k_1}, \dots\rangle$ auch schlecht. Aber das widersprächige der Minimalität von t_{k_0}. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.
Wegen der obigen Behauptung und Ramseys Satz [25] ist es klar, daß die Folge $\langle s_k : k<\omega\rangle$ eine Teilfolge $\langle s_{k_i} : i<\omega\rangle$ enthalten muß, so daß $k_i<k_j$ und $s_{k_i} \leqq s_{k_j}$ für alle i und j mit $i<j<\omega$ gilt. Da $\mathcal{Q}$ wqo ist, gibt es i und j mit $i<j<\omega$ und $Q_{k_i} \leqq Q_{k_j}$. Aber dann haben wir unmittelbar

$$t_{k_i} = \langle Q_{k_i}\rangle\, s_{k_i} \leqq \langle Q_{k_j}\rangle\, s_{k_j} = t_{k_j}\,,$$

was dem Schlechtsein von $\langle t_k : k<\omega\rangle$ widerspricht. $\square$

Beweis von Satz 1.3 (Nash-Williams [22]). Satz 1.3 ist die Behauptung, daß $\mathcal{T}$ wqo ist. Anderenfalls sei $\langle T_k : k<\omega\rangle$ eine minimale schlechte Folge aus $\mathcal{T}$. Für jedes

$k<\omega$ seien T_k^m, $1 \leqq m \leqq n_k$, die Komponenten von $T_k \setminus \{\text{Wurzel}(T_k)\}$. Setzen wir

$$\mathcal{S} = \{T_k^m : k<\omega, 1 \leqq m \leqq n_k\}.$$

Somit ist $\mathcal{S}$ eine Teilmenge von $\mathcal{T}$.
Wir behaupten, daß $\mathcal{S}$ wqo ist. Anderenfalls gäbe es eine schlechte Folge aus $\mathcal{S}$ der Form $\langle T_{k_i}^{m_i} : i<\omega \rangle$, wobei $1 \leqq m_i \leqq n_{k_i}$ und $k_i < k_j$ für alle i und j mit $i<j<\omega$ ist. Dann wäre die Folge $\langle T_0, T_1, \ldots, T_{k_0-1}, T_{k_0}^{m_0}, T_{k_1}^{m_1}, \ldots \rangle$ auch schlecht, was der Minimalität von T_{k_0} wiederspräche. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.
Wegen Lemma 1.6 haben wir auch $WQO(\mathcal{S}^{<\omega})$. Insbesondere ist die Folge $\langle t_k : k<\omega \rangle$ nicht schlecht, wobei $t_k = \langle T_k^1, T_k^2, \ldots, T_k^{n_k} \rangle \in \mathcal{S}^{<\omega}$ ist. Das heißt, es gibt i und j mit $i<j<\omega$ und $t_i \leqq t_j$. Aber dann folgt unmittelbar $T_i \leqq T_j$, was dem Schlechtsein von $\langle T_k : k<\omega \rangle$ widerspricht. □
Es gibt eine noch allgemeinere Formulierung, die sowohl Higmans Lemma 1.6 als auch Kruskals Satz 1.3 einschließt:

1.7 Definition. Ist $\mathcal{Q}$ eine beliebige Quasiordnung, so setzen wir

$$\mathcal{T}(\mathcal{Q}) := \{(T,l) : T \in \mathcal{T} \quad \text{und} \quad l : T \to \mathcal{Q}\}.$$

D.h., ein Element von $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$ ist ein endlicher Baum mit Marken ais $\mathcal{Q}$. (Die Funktion l heißt *Markierungsfunktion.*) Wir definieren $(T_1, l_1) \leqq (T_2, l_2) :\Leftrightarrow \exists$ Einbettung $f : T_1 \to T_2$ mit $l_1(b) \leqq l_2(f(b))$ für alle $b \in T_1$. Mit dieser Relation wird $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$ quasigeordnet.

1.8 Satz (Kruskal [18]). $\forall \mathcal{Q}(\mathcal{Q}\ wqo \to \mathcal{T}(\mathcal{Q})\ wqo)$.

Beweis. Der Beweis ist eine kleine Modifikation des Beweises von Satz 1.3. Im letzten Teil des Beweises muß man genau wie im letzten Teil des Beweises von Lemma 1.6 wieder den Satz von Ramsey und die *WQO*heit von $\mathcal{Q}$ anwenden. □

2. Nichtbeweisbarkeit von Kruskals Satz in ATR_0

Es ist das Ziel dieses Abschnittes zu zeigen, daß Kruskals Satz 1.3, nämlich $WQO(\mathcal{T})$, in einem bestimmten logischen System ATR_0 nicht beweisbar ist. Zunächst machen wir einige Bemerkungen über ATR_0.
ATR_0 ist ein Teilsystem der Arithmetik der zweiten Stufe. Das Hauptaxiom von ATR_0 ist die *arithmetische transfinite Rekursion*, d.h. die Behauptung, daß arithmetische Komprehension entlang beliebiger abzählbarer Wohlordnungen iterierbar ist. Insbesondere enthält ATR_0 das formale System ACA_0 der arithmetischen Komprehension. Deshalb erlaubt ATR_0 eine bequeme Entwicklung großer Teile der üblichen Mathematik, wie z.B. die Theorie der stetigen Funktionen mehrer reeller Variablen, das Riemannsche Integral, die Theorie der abzählbaren Körper, die Topologie vollkommener separabler metrischer Räume, die Struktur-

theorie separabler Banachräume und im allgemeinen alle anwendbare Mathematik. (Die Details der Entwicklung der üblichen Mathematik in ACA_0 sind z.B. in [11, 34, 36, 40] dargestellt.) Außerdem erlaubt ATR_0 eine gute Theorie abzählbarer Wohlordnungen. Auf dieser Basis reichen die Axiome von ATR_0 aus, viele Sätze der Mathematik zu beweisen, die in ACA_0 nicht beweisbar sind. Z.B. erhält man in ATR_0: (i) die Tatsache, daß jede überabzählbare analytische Menge eine perfekte Teilmenge enthält; (ii) den Satz von Lusin über analytische Mengen; (iii) Determiniertheit offener Spiele in ω^ω; (iv) die Ramseyeigenschaft für offene Teilmengen von $[\omega]^\omega$; (v) die Ulmsche Strukturtheorie für abzählbare reduzierte abelsche p-Gruppen. Details über ATR_0 finden sich in [10, 11, 14, 32, 33, 36].
In diesem Abschnitt werden wir den Satz von Friedman ([7, 10]) benutzen, der besagt, daß die beweistheoretische Ordinalzahl von ATR_0 genau die Ordinalzahl Γ_0 ist. Es war schon lange bekannt, daß Γ_0 auch die beweistheoretische Ordinalzahl von Fefermans formalem System IR der sogenannten prädikativen Analysis ist [5]. (Siehe auch Schütte [28].) Aber IR ist vom Standpunkt der üblichen mathematischen Praxis viel schwächer als ATR_0 [10, 11, 36]. Aus diesem Grund betrachten wir lieber ATR_0 als IR.
Wir benutzen das folgende primitiv rekursive Bezeichnungssystem für die Ordinalzahlen kleiner als Γ_0. Für jede Ordinalzahl $\alpha \in On$ definieren wir eine Funktion $\varphi_\alpha : On \to On$. Nämlich $\varphi_0(\beta) := \omega^\beta$ und, für $\alpha > 0$, $\varphi_\alpha(\beta) :=$ der βte simultane Fixpunkt der Funktionen $\varphi_{\alpha'}, \alpha' < \alpha$. Dann ist Γ_0 die kleinste Ordinalzahl $\gamma > 0$, so daß $\alpha + \beta < \gamma$ und $\varphi(\alpha, \beta) < \gamma$ für alle $\alpha, \beta < \gamma$ gilt. Auf diese Weise wird jedes $\alpha < \Gamma_0$ durch einen Term in $0, +, \varphi$ bezeichnet, z.B.

$$\varepsilon_2 = \varphi(1,2) = \varphi(\varphi(0,0), \varphi(0,0) + \varphi(0,0)).$$

Die Ordnungsrelation dieser Terme ist primitiv rekursiv.

2.1 Lemma.
1. *Ist* $\alpha \leqq \beta$, *dann sind auch* $\beta \leqq \alpha + \beta \leqq \beta + \alpha \leqq \varphi(\alpha, \beta) \leqq \varphi(\beta, \alpha)$.
2. *Sind* $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ *und* $\beta_1 \leqq \beta_2$, *dann sind auch* $\alpha_1 + \beta_1 \leqq \alpha_2 + \beta_2$ *und* $\varphi(\alpha_1, \beta_1) \leqq \varphi(\alpha_2, \beta_2)$.

Beweis. Klar. □

Wir definieren eine primitiv rekursive Abbildung $o: \mathscr{T} \to \Gamma_0$, wobei $\mathscr{T}$ die Menge aller endlichen Bäume ist. Die Anzahl der Elemente von T wird mit $|T|$ bezeichnet. Durch Induktion nach $|T|$ definieren wir $o(T) < \Gamma_0$.
I. Ist $|T| = 1$, setzen wir $o(T) = 0$.
II. Sonst hat Wurzel (T) endlich viele unmittelbare Nachfolger $b_1, b_2, \ldots, b_m$, $m \geqq 1$. Wir setzen $T^i = \{c \in T : c \geqq b_i\}$. So sind die Teilbäume $T^1, T^2, \ldots, T^m$ gerade die Komponenten von $T \backslash \{\text{Wurzel}(T)\}$. Weil $|T^i| < |T|$ ist, dürfen wir als Induktionsvoraussetzung annehmen, daß $o(T^i)$ schon definiert ist. Ferner dürfen wir

annehmen, daß $o(T^1) \geqq o(T^2) \geqq \ldots \geqq o(T^m)$ gilt. Wir setzen $\beta = o(T^1)$, $\alpha = o(T^2)$, und

$$o(T) = \begin{cases} \beta & \text{wenn} \quad m=1, \\ \alpha+\beta & \text{wenn} \quad m=2, \\ \beta+\alpha & \text{wenn} \quad m=3, \\ \varphi(\alpha,\beta) & \text{wenn} \quad m=4, \\ \varphi(\beta,\alpha) & \text{wenn} \quad m \geqq 5. \end{cases}$$

Somit ist $o(T)$ für alle $T \in \mathscr{T}$ definiert.

2.2 Lemma. *Für jedes $\alpha < \Gamma_0$ gibt es einen endlichen Baum $T \in \mathscr{T}$ mit $o(T) = \alpha$.*

Beweis. Klar. □

Für jedes $c \in T$ setzen wir $T^c = \{d \in T : d \geqq c\}$.

2.3 Lemma. *Ist $c \leqq d$, so ist $o(T^c) \geqq o(T^d)$.*

Beweis. Klar angesichts 2.1.1 and 2.1.2. □

2.4 Lemma. *Ist $f: T_1 \to T_2$ eine Einbettung, so ist $o(T_1^a) \leqq o(T_2^{f(a)})$ für jedes $a \in T_1$.*

Beweis. Induktion nach $|T_1^a|$. Für $|T_1^a| = 1$ ist $o(T_1^a) = 0$ und das Lemma ist trivial. Sei m (bzw. n) die Anzahl der unmittelbaren Nachfolger von a in T_1 (bzw. von $f(a)$ in T_2). Für jeden unmittelbaren Nachfolger b_i von a, $1 \leqq i \leqq m$, sei c_i der eindeutig bestimmte unmittelbare Nachfolger von $f(a)$ in T_2 mit $f(a) < c_i \leqq f(b_i)$. Nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 2.3 haben wir $o(T_1^{b_i}) \leqq o(T_2^{f(b_i)}) \leqq o(T_2^{c_i})$. Außerdem haben wir für $1 \leqq i < j \leqq m$ schon $a = b_i \wedge b_j$; also ist $f(a) = f(b_i) \wedge f(b_j) = c_i \wedge c_j$ und daher ist $c_i \neq c_j$. Somit ist klar, daß $m \leqq n$. Angesichts 2.1.1 und 2.1.2 folgt damit $o(T_1^a) \leqq o(T_2^{f(a)})$. □

2.5 Lemma. *Ist $T \leqq T'$, dann ist auch $o(T) \leqq o(T')$.*

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus den Lemmata 2.3 und 2.4. □

Wir schreiben $WO(\Gamma_0)$ als eine Abkürzung für die Behauptung, daß das primitiv rekursive Bezeichnungssystem für die Ordinalzahlen $< \Gamma_0$ wohlgeordnet ist.

2.6 Lemma. *$WQO(\mathscr{T}) \to WO(\Gamma_0)$ ist in ACA_0 beweisbar.*

Beweis. Wir argumentieren innerhalb von ACA_0. Sei $\langle \alpha_k : k < \omega \rangle$ eine beliebige Folge von Bezeichnungen für Ordinalzahlen $< \Gamma_0$. Wegen Lemma 2.2 gibt es eine entsprechende Folge endlicher Bäume $\langle T_k : k < \omega \rangle$ mit $o(T_k) = \alpha_k$ für jedes $k < \omega$.

Infolge der Voraussetzung $WQO(\mathscr{T})$ gibt es i und j mit $i<j<\omega$ und $T_i \leqq T_j$. Wegen Lemma 2.5 haben wir $\alpha_i = o(T_i) \leqq o(T_j) = \alpha_j$. Daher ist $\langle \alpha_k : k<\omega \rangle$ keine absteigende Folge, d.h. $WO(\Gamma_0)$. □

2.7 Lemma (Friedman). *$WO(\Gamma_0)$ ist in ATR_0 nicht beweisbar.*

Beweis. Siehe [10, 14, 32]. □

2.8 Satz (Friedman [8]). *Kruskals Satz $WQO(\mathscr{T})$ ist in ATR_0 nicht beweisbar.*

Beweis. Weil $ATR_0 \supseteqq ACA_0$, haben wir aus Lemma 2.6, daß $WQO(\mathscr{T}) \rightarrow WO(\Gamma_0)$ in ATR_0 beweisbar ist. Wäre auch $WQO(\mathscr{T})$ in ATR_0 beweisbar, so wäre $WO(\Gamma_0)$ in ATR_0 beweisbar, was Lemma 2.7 widerspräche. □

2.9 Bemerkung. Es ist klar, daß wir Γ_0 durch etwas größere Ordinalzahlen ersetzen könnten, z.B. Γ_{ε_0}, Γ_{Γ_0}, etc. Das ist interessant, weil z.B. Γ_{ε_0} laut Friedman und Jäger (siehe [8, 14, 32]) die beweistheoretische Ordinalzahl des formalen Systems ATR ist. Daher folgt, daß $WQO(\mathscr{T})$ auch in ATR nicht beweisbar ist. Aber es gibt eine Grenze: Friedman [8] hat gezeigt, daß $WQO(\mathscr{T})$ (tatsächlich $\forall \mathscr{Q}(\mathscr{Q}\, wqo \rightarrow \mathscr{T}(\mathscr{Q})\, wqo)$) in dem formalen System $\Pi^1_2 - TI_0$ (vgl. [32]) beweisbar ist. Die beweistheoretische Ordinalzahl von $\Pi^1_2 - TI_0$ ist echt kleiner als die Howardzahl $\Psi_0(\varepsilon_{\Omega_1+1})$. Für eine genauere Berechnung gewisser dem Kruskalsatz zugeordneter Ordinalzahlen siehe auch Schmidt [27]. Die Arbeit [27] enthält aber keine Folgerungen wie z.B. Satz. 2.8.

3. Eine endliche Miniaturisierung von Kruskals Satz

Das Hauptproblem, mit dem wir uns in der vorliegenden Arbeit beschäftigen, ist folgendes: *mathematisch bedeutsame, endlich-kombinatorische Sätze zu finden, die in verhältnismäßig starken logischen Systemen nicht beweisbar sind.*

Wenn wir Satz 2.8 (die Nichtbeweisbarkeit von $WQO(\mathscr{T})$ in ATR_0) vom Standpunkt dieses Problems aus betrachten, bemerken wir einen Mangel. Der Satz $WQO(\mathscr{T})$ gehört nämlich nicht zum Gebiet der reinen endlichen Kombinatorik, weil er einen Quantor über unendlichen Folgen enthält. Anders ausgedrückt, der Satz $WQO(\mathscr{T})$ ist nicht endlich-kombinatorisch, denn seine syntaktische Form ist Π^1_1 und nicht arithmetisch.

In diesem Abschnitt werden wir sehen, auf welche Weise Friedman diesen Einwand überwindet. Die Idee ist es, den Π^1_1-Satz $WQO(\mathscr{T})$ mit seiner sogenannten Π^0_2-endlichen Miniaturisierung zu ersetzen. Im allgemeinen soll eine endliche Miniaturisierung zwei unentbehrliche Eigenschaften haben: (i) sie soll mathematisch nicht viel komplizierter als ihr unendliches Vorbild sein; (ii) trotzdem soll sie immerhin in verhältnismäßig starken logischen Systemen nicht beweisbar sein.

3.1 Definition (Friedman [8]). *$LWQO(\mathscr{T})$* ist die folgende Behauptung: Für jedes c gibt es eine so große Konstante k, daß es für jede endliche Folge $\langle T_0, T_1, \ldots, T_k\rangle$ endlicher Bäume, in der $|T_i| \leqq c \cdot (i+1)$ für alle $i \leqq j$ gilt, Indizes i und j mit $i < j \leqq k$ und $T_i \leqq T_j$ gibt.

In der Aussage von $LWQO(\mathscr{T})$ bezeichnet $|T|$ die Anzahl der Elemente (d.h. Knoten) des endlichen Baumes T. Die Bedingung $|T_i| \leqq c \cdot (i+1)$ ist eine lineare Wachstumsbedingung für die Folge $\langle T_0, T_1, \ldots, T_k\rangle$. Die Wahrheit von $LWQO(\mathscr{T})$ folgt mit Leichtigkeit aus $WQO(\mathscr{T})$ und Königs Lemma [17].
Wir werden tatsächlich sehen, daß $LWQO(\mathscr{T})$ die erwünschte endliche Miniaturisierung von $WQO(\mathscr{T})$ ist. Es ist schon klar, daß die Π^0_2-Behauptung $LWQO(\mathscr{T})$ ein mathematisch bedeutsamer Satz der endlichen Kombinatorik ist, der auch nicht viel komplizierter als $WQO(\mathscr{T})$ ist. Betreffend die zweite erwünschte Eigenschaft haben wir:

3.2 Satz (Friedman [8]). *Das kombinatorische Prinzip $LWQO(\mathscr{T})$ ist in ATR_0 nicht beweisbar.*

Es scheint angemessen, die Beweismethode für diesen Satz in einem etwas höheren Grad von Allgemeinheit darzustellen. Sei B ein festgehaltenes, „vernünftiges", primitiv rekursives Ordinalzahlbezeichnungssystem. (Alle in der Beweistheorie üblichen Bezeichnungssysteme [1, 3, 13, 15, 29] sind „vernünftig". Für den Beweis von Satz 3.2 ist B gleich dem Bezeichnungssystem für Γ_0.)

3.3 Definition. $WO(B)$ ist die Behauptung, daß B wohlgeordnet ist. Für jedes $\beta \in B$ ist $WO(\beta)$ die Behauptung, daß B bis nach β wohlgeordnet ist, d.h., daß B keine mit β beginnende unendliche absteigende Folge enthält. Wir bemerken, daß $WO(B)$ und $WO(\beta)$ Π^1_1-Behauptungen sind. $PRWO(B)$ ist die Behauptung, daß B primitiv rekursiv wohlgeordnet ist, d.h., daß B keine unendliche primitiv rekursive absteigende Folge enthält. Auf analoge Weise definieren wir auch $PRWO(\beta)$ für jedes $\beta \in B$. Wir bemerken, daß $PRWO(B)$ und $PRWO(\beta)$ Π^0_2-Behauptungen sind.

3.4 Definition. Für $\beta \in B$ bezeichnen wir mit $|\beta|$ die Anzahl von Symbolen in β. Eine unendliche Folge $\langle \beta_i : i < \omega\rangle$ aus B heißt *langsam*, wenn gilt $\exists c \forall i(|\beta_i| \leqq c \cdot (i+1))$. $LWO(B)$ ist die Behauptung, daß B *langsam wohlgeordnet* ist, d.h., daß B keine langsame, unendliche, absteigende Folge enthält. Wegen Königs Lemma ist $LWO(B)$ mit der folgenden Π^0_2-Behauptung äquivalent: für jedes c gibt es ein k, so daß es in B keine endliche absteigende Folge $\beta_0 > \beta_1 > \ldots > \beta_k$ mit $|\beta_i| \leqq c \cdot (i+1)$ für alle $i \leqq k$ gibt. Diese Π^0_2-Behauptung bezeichnen wir ebenfalls als $LWO(B)$. Auf analoge Weise definieren wir auch $LWO(\beta)$ for $\beta \in B$.

3.5 Satz (Friedman [8]). *In ACA_0 können wir beweisen, daß die folgenden Behauptungen paarweise äquivalent sind:*

1. *Das formale System $ACA_0 + \{WO(\beta) : \beta \in B\}$ ist Π^0_2-korrekt.*
2. $PRWO(B)$.
3. $LWO(B)$.

Beweis. Wir argumentieren innerhalb von ACA_0. Die Implikation $2 \rightarrow 1$ ist ein Ergebnis der klassischen Beweistheorie (siehe z.B. [39, 1]). Implikationen $1 \rightarrow 2$ und $1 \rightarrow 3$ sind trivial, denn $PRWO(\beta)$ und $LWO(\beta)$ sind Π^0_2-Konsequenzen von $WO(\beta)$. Es bleibt, die Implikation $3 \rightarrow 2$ zu beweisen.

3.6 Lemma. *Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für jede primitiv rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt es eine primitiv rekursive Funktion $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \omega^\omega$, so daß:*
(i) $g(n,m) > g(n,m+1)$ *für alle* $m < f(n)$
(ii) $|g(n,m)| \leqq$ *Konstante* $\cdot (n+m+1)$.

Beweis. Wir werden schließlich $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \omega^k$ für irgendein $k < \omega$ bekommen, wobei das k von f abhängt.

I. Für $f(n) = n+1$ dürfen wir $g(n,m) = n+2-m$ nehmen. In diesem Fall haben wir $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \omega$.

II. Nehmen wir an, daß $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \omega^k$ die erwünschte Bedingung für ein bestimmtes f erfüllt. Wir werden ein $g' : \mathcal{N}^2 \rightarrow \omega^{k+1}$ definieren, das dieselben Bedingungen für f' erfüllt, wobei $f^0(n) = n$, $f^{i+1}(n) = f(f^i(n))$, und $f'(n) = f^n(n)$. Nämlich

$$g'(n,m) = \omega^k \cdot (n-i) + g(f^i(n), j),$$

wobei $m = f(n) + f^2(n) + \ldots + f^i(n) + j$, $i < n$, $j < f^{i+1}(n)$. Wir rechnen aus:

$$\begin{aligned} |g'(n,m)| &\leqq \text{Konstante} \cdot n + \text{Konstante} \cdot (f^i(n) + j + 1) \\ &\leqq \text{Konstante} \cdot (n+m+1). \end{aligned}$$

III. Die Grzegorczyk-Hierarchie wird durch $f_0(n) = n+1$, $f_{k+1}(n) = f_k^n(n)$ definiert. Aus I und II bekommt jedes f_k ein entsprechendes $g_k : \mathbb{N}^2 \rightarrow \omega^{k+1}$, das die Bedingungen (i) und (ii) für f_k erfüllt. Aber es ist bekannt, daß jede primitiv rekursive Funktion $f(n)$ von irgendeinem f_k(Konstante $+ n$) dominiert wird. Somit erfüllt g_k(Konstante $+ n, m$) die Bedingungen (i) und (ii) für f. □

3.7 Lemma. *Gegeben eine primitiv rekursive absteigende Folge $\langle \beta_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ in B. Dann können wir eine langsame, primitiv rekursive, absteigende Folge $\langle \alpha_m : m \in \mathbb{N} \rangle$ angeben.*

Beweis. Nach Lemma 3.6 sei $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \omega^\omega$ primitiv rekursiv mit $g(n,j) > g(n,j+1)$ für alle $j < |\beta_{n+1}|$, und $|g(n,j)| \leqq \text{Konstante} \cdot (n+j+1)$ für alle n und j. Wir setzen

$$\alpha_m = \omega^\omega \cdot \beta_n + g(n,j),$$

wobei $m = |\beta_1| + |\beta_2| + \ldots + |\beta_n| + j$, $j < |\beta_{n+1}|$. Wir rechnen aus:

$$\begin{aligned} |\alpha_m| &\leqq \text{Konstante} \cdot |\beta_n| + \text{Konstante} \cdot (n+j+1) \\ &\leqq \text{Konstante} \cdot (m+1). \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 3.7 gibt die Implikation 3→2 und beendet damit den Beweis von Satz 3.5. □

Jetzt werden wir Satz 3.5 auf den Spezialfall $B=\Gamma_0$ anwenden.

3.8 Lemma. *$LWO(\Gamma_0)$ ist in ATR_0 nicht beweisbar.*

Beweis. In [10] wurde innerhalb von ACA_0 gezeigt, daß $ACA_0+\{WO(\beta):\beta<\Gamma_0\}$ eine Axiomatisierung der in ATR_0 beweisbaren Π^1_1-Sätze ist. Aus dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz sehen wir, daß die Konsistenz von $ACA_0+\{WO(\beta):\beta<\Gamma_0\}$ in ATR_0 nicht beweisbar ist. Aus Satz 3.5 folgt, daß auch $LWO(\Gamma_0)$ in ATR_0 nicht beweisbar ist. □

3.9 Lemma. *Für jedes $\alpha<\Gamma_0$ gibt es einen endlichen Baum $T\in\mathcal{T}$ mit $o(T)=\alpha$ und $|T|\leqq 4\cdot|\alpha|$. (Vgl. Lemma 2.2.)*

Beweis. Klar. □

3.10 Lemma. *$LWQO(\mathcal{T})\to LWO(\Gamma_0)$ ist in ACA_0 beweisbar.*

Beweis. Wir argumentieren innerhalb von ACA_0. Gegeben sei eine Konstante c. Nach der Voraussetzung $LWQO(\mathcal{T})$ gibt es ein k so groß, daß es keine schlechte Folge $\langle T_0, T_1, \ldots, T_k\rangle$ gibt mit $|T_i|\leqq 4c\cdot(i+1)$ für jedes $i\leqq k$. Mit den Lemmata 3.9 und 2.5 sehen wir, daß es auch keine absteigende Folge $\Gamma_0>\alpha_0>\alpha_1>\ldots>\alpha_k$ gibt mit $|\alpha_i|\leqq c\cdot(i+1)$ für jedes $i\leqq k$. Somit haben wir $LWO(\Gamma_0)$ bewiesen. □

Beweis von Satz 3.2. Der Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus den Lemmata 3.8 und 3.10 und der Tatsache $ATR_0\supseteqq ACA_0$. □

4. Eine Erweiterung von Kruskals Satz

In diesem Abschnitt beschreiben wir eine bestimmte Erweiterung von Kruskals Satz. Der Beweis dieses erweiterten Kruskalsatzes ist ein wenig komplizierter als der des Kruskalsatzes selbst. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß der erweiterte Kruskalsatz in dem formalen System $\Pi^1_1-CA_0$ nicht beweisbar ist. Sowohl der erweiterte Kruskalsatz als auch seine Nichtbeweisbarkeit in $\Pi^1_1-CA_0$ sind Friedman zu verdanken.

4.1 Definition (Friedman [9]). Für $n<\omega$ ist $\mathcal{T}_n$ die Menge aller endlichen Bäume mit Marken aus n. D.h. $(T,l)\in\mathcal{T}_n$ genau dann, wenn $T\in\mathcal{T}$ und $l: T\to\{0,1,\ldots,n-1\}$. Die Menge $\mathcal{T}_n$ wird quasigeordnet durch $(T_1,l_1)\leqq(T_2,l_2)$ genau dann, wenn es existiert eine Einbettung $f: T_1\to T_2$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) für jedes $b \in T_1$ ist $l_1(b) = l_2(f(b))$;
(ii) ist b ein unmittelbarer Nachfolger von a in T_1, dann ist es für jedes $c \in T_2$ mit $f(a) < c < f(b)$ schon $l_2(c) \geqq l_2(f(b))$.

Die Bedingung (ii) in der obigen Definition heißt *Lückenbedingung.*

4.2 Satz (Friedman [9]). *Für jedes $n < \omega$ ist $\mathcal{T}_n$ eine Wohlquasiordnung.*

Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir die folgende verallgemeinerte Version. Für $b \in T \in \mathcal{T}$ schreiben wir $T^b = \{a \in T : a \geqq b\}$. Falls $T^b = T$, heißt b die *Wurzel* von T. Falls $T^b = \{b\}$, heißt b ein *Endknoten von* T. Falls $T^b \neq \{b\}$, heißt b ein *Innenknoten* von T.

4.3 Definition. Für $n < \omega$ und eine beliebige Quasiordnung $\mathcal{Q}$ sei $\mathcal{T}_n(\mathcal{Q})$ die Menge aller endlichen Bäume mit Marken, wobei die Endknoten aus $\mathcal{Q}$ und die Innenknoten aus n markiert werden. D.h. $(T, l) \in \mathcal{T}_n(\mathcal{Q})$ genau dann, wenn $T \in \mathcal{T}$, $l: T \to \mathcal{Q} \cup \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $l(b) \in \mathcal{Q}$ für alle Endknoten b, und $l(b) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ für alle Innenknoten b. Die Menge $\mathcal{T}_n(\mathcal{Q})$ wird quasigeordnet durch $(T_1, l_1) \leqq (T_2, l_2)$ genau dann, wenn es existiert eine Einbettung $f: T_1 \to T_2$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) Ist b ein Endknoten von T_1, dann ist auch $f(b)$ ein Endknoten von T_2 und $l_1(b) \leqq l_2(f(b))$. (Vgl. Def. 1.7.)
(ii) Ist b ein Innenknoten von T_1, dann ist auch $f(b)$ ein Innenknoten von T_2 und $l_1(b) = l_2(f(b))$.
(iii) Sind a und b Innenknoten von T_1, mit b ein unmittelbarer Nachfolger von a, dann ist für jedes $c \in T_2$ mit $f(a) < c < f(b)$ schon $l_2(c) \geqq l_2(f(b))$.

Wir brauchen auch die folgende Variante:

4.4 Definition. $\mathcal{T}_n^+(\mathcal{Q})$ ist dieselbe Menge von endlichen markierten Bäumen wie $\mathcal{T}_n(\mathcal{Q})$. Die Quasiordnung von $\mathcal{T}_n^+(\mathcal{Q})$ wird genau wie für $\mathcal{T}_n(\mathcal{Q})$ definiert, aber mit folgender zusätzlicher Lückenbedingung an die Einbettungen $f: T_1 \to T_2$:
(iv) Ist $b = \text{Wurzel}(T_1)$ ein Innenknoten von T_1, dann ist für jedes $c \in T_2$ mit $c < f(b)$ schon $l_2(c) \geqq l_2(f(b))$.

Durch Induktion nach $n < \omega$ werden wir zeigen, daß $\forall \mathcal{Q}(\mathcal{Q}\,\text{wqo} \to \mathcal{T}_n^+(\mathcal{Q})\,\text{wqo})$. Insbesondere $\forall \mathcal{Q}(\mathcal{Q}\,\text{wqo} \to \mathcal{T}_n(\mathcal{Q})\,\text{wqo})$, und dann ist die *WQO*heit von $\mathcal{T}_n$ im Grunde genommen der Spezialfall, wobei $\mathcal{Q}$ die triviale 1-elementige Wohlquasiordnung ist.
Manchmal werden wir für $(T, l) \in \mathcal{T}_n(\mathcal{Q})$ einfach T anstatt (T, l) schreiben. Dann werden wir für jedes $b \in T$ auch T^b anstatt $(T^b, l | T^b)$ und Marke(b) für $l(b)$ schreiben.
Ist $T \in \mathcal{T}_{n+1}^+(\mathcal{Q})$ mit $T \neq \{\text{Wurzel}(T)\}$, so setzen wir $m = \mu(T) := \min\{\text{Marke}(b) : b$ ein Innenknoten von $T\}$. Dann definieren wir T^* als den Baum, der sich ergibt,

wenn wir erstens jeden mit der Marke m minimalen Innenknoten b von T zu einem Endknoten von T^* mit der Marke T^b verändern, zweitens 1 von der Marke jedes übrigbleibenden Innenknotens von T abziehen. Somit ist $T^* \in \mathscr{T}_n^+(\mathscr{T}_{n+1}(\mathscr{Q}))$.

4.5 Lemma. *Sind $\mu(T_1)=\mu(T_2)=m$ und $T_1^* \leqq T_2^*$ in $\mathscr{T}_n^+(\mathscr{T}_{n+1}(\mathscr{Q}))$, dann ist auch $T_1 \leqq T_2$ in $\mathscr{T}_{n+1}^+(\mathscr{Q})$.*

Beweis. Klar. □

4.6 Lemma. *Wenn $\forall \mathscr{Q}(\mathscr{Q}\,wqo \to \mathscr{T}_n^+(\mathscr{Q})$ und $\mathscr{T}_{n+1}(\mathscr{Q})\,wqo)$ gelten, dann gilt auch $\forall \mathscr{Q}(\mathscr{Q}\,wqo \to \mathscr{T}_{n+1}^+(\mathscr{Q})\,wqo)$.*

Beweis. Sei $\langle T_k : k<\omega\rangle$ eine beliebige Folge aus $\mathscr{T}_{n+1}^+(\mathscr{Q})$. Wir wollen zeigen, daß $\exists i \exists j$ $(i<j$ und $T_i \leqq T_j)$. Wir dürfen annehmen, daß $\forall k(T_k \neq \{\text{Wurzel}(T_k)\})$ und $\exists m \forall k(\mu(T_k)=m)$ gelten. Wir betrachten die Folge $\langle T_k^* : k<\omega\rangle$ aus $\mathscr{T}_n^+(\mathscr{T}_{n+1}(\mathscr{Q}))$. Nach Voraussetzung ist $\mathscr{T}_n^+(\mathscr{T}_{n+1}(\mathscr{Q}))$wqo. Daher $\exists i \exists j$ $(i<j$ und $T_i^* \leqq T_j^*)$. Aber dann folgt mit Hilfe von Lemma 4.5 auch $T_i \leqq T_j$. □

4.7 Lemma. *Wenn $\forall \mathscr{Q}(\mathscr{Q}\,wqo \to \mathscr{T}_n^+(\mathscr{Q})\,wqo)$ gilt, dann gilt auch $\forall \mathscr{Q}(\mathscr{Q}\,wqo \to \mathscr{T}_{n+1}(\mathscr{Q})\,wqo)$.*

Beweis. Anderenfalls sei $\langle T_k : k<\omega\rangle$ eine minimale schlechte Folge (vgl. Abschnitt 1) aus $\mathscr{T}_{n+1}(\mathscr{Q})$. Wir setzen

$$\mathscr{S} = \{T_k^b : k<\omega, b \in T_k \setminus \{\text{Wurzel}(T_k)\}\}.$$

Zunächst behaupten wir, daß $\mathscr{S}$ als Teilmenge von $\mathscr{T}_{n+1}(\mathscr{Q})$ wqo ist. Anderenfalls gäbe es eine schlechte Folge der Form $\langle T_{k_i}^{b_i} : i<\omega\rangle$, wobei $k_i<k_j$ und $b_i \in T_{k_i} \setminus \{\text{Wurzel}(T_{k_i})\}$ für alle i und j mit $i<j<\omega$ gilt. Aber dann wäre die Folge $\langle T_0, T_1, \ldots, T_{k_0-1}, T_{k_0}^{b_0}, T_{k_1}^{b_1}, \ldots\rangle$ auch schlecht, was der Minimalität von T_{k_0} widerspräche.
Jetzt behaupten wir weiter, daß $\mathscr{S}$ als Teilmenge von $\mathscr{T}_{n+1}^+(\mathscr{Q})$ wqo ist. Setzen wir $\mathscr{S}_\infty = \{T \in \mathscr{S} : T = \{\text{Wurzel}(T)\}\}$. Weil $\mathscr{Q}$ wqo ist, ist es klar, daß $\mathscr{S}_\infty$ in $\mathscr{T}_{n+1}^+(\mathscr{Q})$ *wqo* ist. Für jedes $m \leqq n$ setzen wir $\mathscr{S}_m = \{T \in \mathscr{S} : \mu(T)=m\}$ und $\mathscr{S}_m^* = \{T^* : T \in \mathscr{S}_m\}$. So haben wir $\mathscr{S}_m^* \subseteqq \mathscr{T}_n^+(\mathscr{S})$ und aus der Voraussetzung folgt, daß $\mathscr{S}_m^*$ in $\mathscr{T}_n^+(\mathscr{T}_{n+1}(\mathscr{Q}))$wqo ist. Dann ist $\mathscr{S}_m$ nach Lemma 4.5 auch in $\mathscr{T}_{n+1}^+(\mathscr{Q})$wqo. Nun folgt, daß

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_\infty \cup \bigcup_{m=0}^{n} \mathscr{S}_m$$

in $\mathscr{T}_{n+1}^+(\mathscr{Q})$ wqo ist. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.
Nun seien $T_k^1, T_k^2, \ldots, T_k^{n_k}$, $n_k \geqq 0$, für alle $k<\omega$ die Komponenten von $T_k \setminus \{\text{Wurzel}(T_k)\}$. Die endlichen Folgen $\langle T_k^1, T_k^2, \ldots, T_k^{n_k}\rangle$, $k<\omega$ gehören zu $\mathscr{S}^{<\omega}$ und sind daher angesichts Higmans Lemma 1.6 in $(\mathscr{T}_{n+1}^+(\mathscr{Q}))^{<\omega}$ wohlquasigeordnet. Deshalb gibt es i und j mit $i<j<\omega$ und Marke(Wurzel(T_i)) $=$ Marke(Wurzel(T_j)) und $\langle T_i^1, T_i^2, \ldots, T_i^{n_i}\rangle \leqq \langle T_j^1, T_j^2, \ldots, T_j^{n_j}\rangle$ in $(\mathscr{T}_{n+1}^+(\mathscr{Q}))^{<\omega}$.

Es folgt unmittelbar, daß $T_i \leqq T_j$ in $\mathcal{T}_{n+1}(\mathcal{Q})$ (in $\mathcal{T}^+_{n+1}(\mathcal{Q})$ tatsächlich). Aber das widerspricht dem Schlechtsein von $\langle T_k : k < \omega \rangle$ in $\mathcal{T}_{n+1}(\mathcal{Q})$. □

4.8 Satz (Friedman [9]). *Für jedes $n < \omega$ gilt $\forall \mathcal{Q}(\mathcal{Q}\ wqo \rightarrow \mathcal{T}^+_{n+1}(\mathcal{Q})\ wqo)$.*

Beweis. Aus den Lemmata 4.6 und 4.7 durch Induktion nach $n < \omega$. Als Induktionsbasis nimmt man $\forall \mathcal{Q}(\mathcal{Q}\mathrm{wqo} \rightarrow \mathcal{T}_0^+(\mathcal{Q})\ wqo)$, eine eigentlich triviale Tatsache, weil $\mathcal{T}_0^+(\mathcal{Q}) \cong \mathcal{Q}$. □

Beweis von Satz 4.2. Satz 4.2 ist ein Spezialfall von Satz 4.8. □

5. Nichtbeweisbarkeit des erweiterten Kruskalsatzes in $\Pi^1_1 - CA_0$

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß Friedmans erweiterter Kruskalsatz 4.2, nämlich $\forall n WQO(\mathcal{T}_n)$, in dem logischen System $\Pi^1_1 - CA_0$ nicht beweisbar ist. Hier ist $\Pi^1_1 - CA_0$ das Teilsystem der Arithmetik der zweiten Stufe mit dem Π^1_1-Komprehensionsaxiom $\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$, wobei φ eine beliebige Π^1_1-Formel ist, und dem beschränkten Induktionsaxiom

$$(0 \in X \wedge \forall n(n \in X \rightarrow n+1 \in X)) \rightarrow \forall n(n \in X).$$

Das System $\Pi^1_1 - CA_0$ ist sehr stark, wenn man es vom Standpunkt der üblichen mathematischen Praxis aus betrachtet. Die Axiome von $\Pi^1_1 - CA_0$ sind viel stärker als die von ATR_0. Daher führen sie zu einer verbesserten Theorie der abzählbaren Wohlordnungen. Auf dieser Basis reicht $\Pi^1_1 - CA_0$ aus, um viele Sätze u.a. der klassischen deskriptiven Mengenlehre zu beweisen, die in ATR_0 nicht beweisbar sind. Zum Beispiel erhält man in $\Pi^1_1 - CA_0$: (i) den Cantor-Bendixson Satz; (ii) Kondos Uniformisierungssatz; (iii) Silvers Satz über coanalytische Äquivalenzrelationen; (iv) die Ulmschen Struktursätze für beliebige abzählbare abelsche Gruppen; (v) die Ramseyeigenschaft für G_δ Teilmengen von $[\omega]^\omega$. Für Details über $\Pi^1_1 - CA_0$ siehe [7, 11, 26, 30, 32, 36].
Es ist keine Übertreibung zu sagen, daß fast alle Sätze der üblichen Mathematik, die in der Sprache der Arithmetik der zweiten Stufe ausdrückbar sind, schon in $\Pi^1_1 - CA_0$ beweisbar sind. Deshalb ist es besonders interessant, daß der kombinatorische Satz $\forall n\ WQO(\mathcal{T}_n)$ in $\Pi^1_1 - CA_0$ nicht beweisbar ist.
Vom Standpunkt der mathematischen Logik aus ist $\Pi^1_1 - CA_0$ auch sehr interessant. Es ist bekannt, daß $\Pi^1_1 - CA_0$ zu einem gewissen formalen System der Arithmetik der ersten Stufe mit Ramseyquantoren äquivalent ist [26]. $\Pi^1_1 - CA_0$ ist auch mit dem System $ID_{<\omega}$ von [2] äquivalent. Die beweistheoretische Ordinalzahl von $\Pi^1_1 - CA_0$ ist $\Psi_0(\Omega_\omega)$ $(= \theta\Omega_\omega 0$ in dem Bezeichnungssystem von [29]). Hier ist $\Omega_\omega := \aleph_\omega$ (die kleinste singuläre überabzählbare ordinale Anfangszahl) und $\Psi_0 : On \rightarrow \Omega_1$ eine Kollabierungsfunktion.
Wir benutzen das folgende Bezeichnungssystem für die beweisbaren Ordinalzahlen von $\Pi^1_1 - CA_0$.

5.1 Definition (Buchholz [1]). Wir haben Konstanten $\Omega_0 := 0$ und $\Omega_n := \aleph_n$, $1 \leqq n < \omega$. Wir haben eine 2-stellige Funktion $\alpha + \beta$ und eine 1-stellige Funktion ω^α. Dazu haben wir *Kollabierungsfunktionen* $\Psi_i(\alpha)$, $i < \omega$, die durch Induktion nach α definiert werden. Zunächst sei $C_i(\alpha)$ die kleinste Menge von Ordinalzahlen mit:
1. $\{\Omega_n : n < \omega\} \cup \Omega_i \subseteq C_i(\alpha)$;
2. sind $\xi, \eta \in C_i(\alpha)$, dann sind auch $\xi + \eta$, $\omega^\xi \in C_i(\alpha)$;
3. ist $\xi \in C_i(\alpha) \cap \alpha$, dann ist auch $\Psi_k(\xi) \in C_i(\alpha)$ für jedes $k \geqq i$, $k < \omega$.

Dann wird $\Psi_i(\alpha)$ definiert als das kleinste β mit $\beta \notin C_i(\alpha)$.

5.2 Folgerungen.
1. *$\Omega_i < \Psi_i(\alpha) < \Omega_{i+1}$ für alle α.*
2. *Ist $\alpha \leqq \beta$, dann ist auch $\Psi_i(\alpha) \leqq \Psi_i(\beta)$.*
3. *$\Psi_i(\alpha) = C_i(\alpha) \cap \Omega_{i+1}$.*
4. *Ist $\xi < \Psi_i(\alpha)$, dann ist auch $\omega^\xi < \Psi_i(\alpha)$. Mit anderen Worten, $\Psi_i(\alpha)$ ist eine ε-Zahl.*
5. *Ist $\alpha \notin C_i(\alpha)$, dann ist $C_i(\alpha+1) = C_i(\alpha)$ und $\Psi_i(\alpha+1) = \Psi_i(\alpha)$.*
6. *Ist $\alpha \in C_i(\alpha)$, dann ist $\Psi_i(\alpha+1) = \Psi_i(\alpha)^+$, wobei β^+ die kleinste ε-Zahl $> \beta$ bezeichnet.*
7. *Für jede Limeszahl δ ist $\Psi_i(\delta) = \sup\{\Psi_i(\alpha) : \alpha < \delta\}$.*

5.3 Folgerungen.
1. *Gegeben sei $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, wobei $\xi_1 \geqq \ldots \geqq \xi_k$ und $\xi_1, \ldots, \xi_k$ additiv unzerlegbar sind. Ist $\xi \in C_i(\alpha)$, dann sind auch $\xi_1, \ldots, \xi_k \in C_i(\alpha)$.*
2. *Ist $\omega^\xi \in C_i(\alpha)$, dann ist auch $\xi \in C_i(\alpha)$.*
3. *Für jedes $\eta < \Omega_\omega$ und $k < \omega$ gibt es ein eindeutig bestimmtes ξ mit $\Psi_k(\xi) = \Psi_k(\eta)$ und $\xi \in C_k(\xi)$.*
4. *Ist $\Psi_k(\xi) \in C_i(\alpha)$ mit $\xi \in C_k(\xi)$ und $k \geqq i$, dann ist auch $\xi \in C_i(\alpha) \cap \alpha$.*

Bemerkung. Die Beweise der Folgerungen 5.2 und 5.3 außer 5.3.4 sind verhältnismäßig leicht. Der Beweis von 5.3.4 ist etwas schwieriger. Aus 5.3.4 folgt, daß wir in 5.1.3 die Voraussetzung $\xi \in C_i(\alpha) \cap \alpha$ zu $\xi \in C_i(\alpha) \cap \alpha \cap C_k(\xi)$ hätten verstärken können. Mit dieser Veränderung in der Definition hätten sich 5.3.4 und die anderen wesentlichen Eigenschaften der Kollabierungsfunktionen Ψ_i, $i < \omega$, leichter beweisen lassen. Für Details über das Ordinalzahlbezeichnungssystem 5.1 siehe [1, 3, 4, 13, 15].

5.4 Definition. Durch Induktion definieren wir die Menge NF von Termen in *Normalform*.
1. Für jedes $i < \omega$ ist $\Omega_i \in NF$.
2. Sind $\alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_k > 0$, $k \geqq 2$, mit $\alpha_i \in NF$ und additiv unzerlegbar, dann ist auch die Summe $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k \in NF$.
3. Ist $\alpha \in NF$ mit $\alpha < \omega^\alpha$, dann ist auch $\omega^\alpha \in NF$.
4. Ist $\alpha \in NF$ mit $\alpha \in C_i(\alpha)$, dann ist auch $\Psi_i(\alpha) \in NF$.

Auf diese Weise wird jedes $\alpha \in C_0(\Omega_\omega)$ von einem eindeutig bestimmten NF-Term bezeichnet. Sowohl die Menge aller NF-Terme als auch die entsprechende Ordnungsrelation sind primitiv rekursiv [1, 4, 13, 15]. Im folgenden werden wir $C_0(\Omega_\omega)$ mit NF identifizieren.

Nach dem Muster von 2. werden wir in ACA_0 beweisen, daß $\forall n(WQO(\mathscr{T}_n) \to WO(\Psi_0(\Omega_n)))$ gilt. Wir benötigen eine gewisse primitiv rekursive Abbildung o. Der Definitionsbereich von o ist eine gewisse primitiv rekursive Teilmenge von $\bigcup\{\mathscr{T}_n : n<\omega\}$. Der Wertbereich von o ist $C_0(\Omega_\omega)$.

Gegeben $T \in \bigcup\{\mathscr{T}_n : n<\omega\}$; wir setzen $i := $ Marke(Wurzel(T)). Die Definition von $o(T)$ ist die folgende:

I. Falls $T=\{\text{Wurzel}(T)\}$, dann setzen wir $o(T)=\Omega_i$. Sonst hat Wurzel(T) endlich viele unmittelbare Nachfolger $b_1, \dots, b_m$, $m \geqq 1$. Wir dürfen annehmen, daß $\beta_1 \geqq \dots \geqq \beta_m$, wobei $\beta_j = o(T^{b_j})$, $1 \leqq j \leqq m$.

II. Falls $m=2$, Marke$(b_1)=i$, $\beta_1=\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}$, $\beta_2=\alpha_k$, $\alpha_1 \geqq \dots \geqq \alpha_{k-1} \geqq \alpha_k > 0$, $k \geqq 2$ mit jedem α_j additiv unzerlegbar, dann setzen wir $o(T) = \beta_1+\beta_2$.

III. Falls $m=3$, Marke$(b_1)=i$, $\beta_1<\omega^{\beta_1}$, $\beta_2=\beta_3=0$, dann setzen wir $o(T)=\omega^{\beta_1}$.

IV. Falls $m=4$, $\beta_1 \in C_i(\beta_1)$, $\beta_2=\beta_3=\beta_4=0$, dann setzen wir $o(T)=\Psi_i(\beta_1)$.

V. Sonst wird $o(T)$ nicht definiert.

5.5 Lemma. *Für jedes $\alpha \in C_0(\Omega_\omega)$ gibt es einen eindeutig bestimmten Baum $T \in \bigcup\{\mathscr{T}_n : n<\omega\}$ mit $\alpha=o(T)$. In diesem Fall gilt: (i) Marke(Wurzel(T)) $=i$ genau dann, wenn $\Omega_i \leqq \alpha < \Omega_{i+1}$; (ii) $T \in \mathscr{T}_n$ genau dann, wenn $\alpha \in C_0(\Omega_n) \cap \Omega_n$.*

Beweis. Gegeben sei $\alpha \in C_0(\Omega_\omega)$. Dann wird α von einem eindeutig bestimmten NF-Term bezeichnet. Aus der Definition von o ist es klar, daß jedem NF-Term α ein eindeutig bestimmter Baum T entspricht mit $o(T)=\alpha$. Behauptung (i) ist klar durch Induktion nach $|T|$. Behauptung (ii) ist eine Folgerung aus der Bemerkung, daß $\alpha \in C_0(\Omega_n) \cap \Omega_n$ genau dann gilt, wenn kein Ω_k oder Ψ_k mit $k \geqq n$ in dem entsprechenden NF-Term auftritt. □

5.6 Definition. Für jedes $i<\omega$ und $\alpha \in NF$ definieren wir die *i-Subterme* von α durch Induktion nach $|\alpha|$, wobei $|\alpha|$ die Anzahl von Symbolen in α bezeichnet.

1. Jedes $\alpha \in NF$ ist selbst ein i-Subterm von α.
2. Für $\alpha=\alpha_1+\dots+\alpha_k \in NF$ ist jeder i-Subterm von α_j, $1 \leqq j \leqq k$, auch ein i-Subterm von α.
3. Für $\omega^\gamma \in NF$ ist jeder i-Subterm von γ auch ein i-Subterm von ω^γ.
4. Für $k \geqq i$ und $\Psi_k(\gamma) \in NF$ ist jeder i-Subterm von γ auch ein i-Subterm von $\Psi_k(\gamma)$.

5.7 Lemma. *Es sei β ein i-Subterm von $\alpha \in NF$.*

1. *Ist $\alpha \in C_i(\gamma)$, dann ist auch $\beta \in C_i(\gamma)$.*
2. *Ist $\beta < \Omega_{i+1}$, dann ist auch $\beta \leqq \alpha$.*

Beweis. Teil (1) wird durch Induktion nach $|\alpha|$ mit Hilfe von 5.3 leicht bewiesen. Der Beweis von Teil (2) wird auch durch Induktion nach $|\alpha|$ durchgeführt. Zunächst bemerken wir, daß der erwünschte Schluß $\beta \leqq \alpha$ eine unmittelbare Folgerung aus der Induktionsvoraussetzung ist, falls β ein i-Subterm von α nach 5.6.1 oder 5.6.2 oder 5.6.3 ist. Es bleibt der Fall, daß β ein i-Subterm von α nach 5.6.4 ist, d.h. $\alpha = \Psi_k(\gamma)$ mit $k \geqq i$ und β ist i-Subterm von γ. Falls $k > i$, haben wir $\beta < \Omega_{i+1} < \Psi_k(\gamma) = \alpha$ angesichts 5.2.1. So dürfen wir annehmen, daß $k = i$. Wegen $\Psi_i(\gamma) = \alpha \in NF$ haben wir $\gamma \in C_i(\gamma)$. Daher erhalten wir wegen Teil (1) auch $\beta \in C_i(\gamma)$. Dann gilt mit Hilfe der Voraussetzung $\beta < \Omega_{i+1}$ und 5.2.3 auch $\beta < \Psi_i(\gamma) = \alpha$. □

5.8 Lemma. *Ist $o(T)$ definiert und $b \in T$ mit Marke$(c) \geqq$ Marke(b) für jedes $c < b$, so ist $o(T^b) \leqq o(T)$.*

Beweis. Sei $\beta = o(T^b)$ und $i = \text{Marke}(b)$. Wegen 5.5 (i) haben wir $\beta < \Omega_{i+1}$. Nach der Voraussetzung ist es auch klar, daß β ein i-Subterm von $o(T)$ ist. Infolge 5.7.2 bekommen wir $\beta \leqq o(T)$. □

5.9 Lemma. *Ist $f: T_1 \to T_2$ eine Einbettung in $\mathcal{T}_n$, so gilt $o(T_1^a) \leqq o(T_2^{f(a)})$ für alle $a \in T_1$ (falls $o(T_1^a)$ und $o(T_2^{f(a)})$ definiert sind).*

Beweis. Durch Induktion nach $|T_1^a|$. Wir setzen $i = \text{Marke}(a) = \text{Marke}(f(a))$.
I. Ist $T_1^a = \{a\}$, dann haben wir $o(T_1^a) = \Omega_i \leqq o(T_2^{f(a)})$ wegen 5.5 (i).

Ist T_1^a nicht von dieser Gestalt, so seien $b_1, \ldots, b_m$ (bzw. $c_1, \ldots, c_n$) die unmittelbaren Nachfolger von a in T_1 (bzw. von $f(a)$ in T_2). Somit gilt $2 \leqq m \leqq n \leqq 4$. Für jedes j mit $1 \leqq j \leqq m$ dürfen wir annehmen, daß $f(a) < c_j \leqq f(b_j)$. Wir haben $o(T_1^{b_j}) \leqq o(T_2^{f(b_j)})$ nach Induktionsvoraussetzung und $o(T_2^{f(b_j)}) \leqq o(T_2^{c_j})$ infolge der Lückenbedingung 4.1 (ii) und Lemma 5.8. Daher ist $\beta_j \leqq \gamma_j$, wobei $\beta_j = o(T_1^{b_j})$ und $\gamma_j = o(T_2^{c_j})$. Wir dürfen annehmen, daß $\beta_1 \geqq \ldots \geqq \beta_m$. Sei auch $\alpha = o(T_1^a)$ und $\delta = o(T_2^{f(a)})$. Mit dieser Notation ist die Behauptung unseres Lemmas $\alpha \leqq \delta$.
II. Falls $m = 2$, haben wir $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ mit $\beta_1 \geqq \beta_2 > 0$. Daher sind auch $\gamma_1 > 0$ und $\gamma_2 > 0$. So müssen wir $n = 2$ haben. Daher gilt entweder $\alpha = \beta_1 + \beta_2 \leqq \gamma_1 + \gamma_2 = \delta$ (falls $\gamma_1 \geqq \gamma_2$) oder $\alpha = \beta_1 + \beta_2 \leqq \gamma_2 + \gamma_1 = \delta$ (falls $\gamma_2 \geqq \gamma_1$).
III. Falls $m = 3$, haben wir $\alpha = \omega^{\beta_1}$. Ist auch $n = 3$, dann gilt $\alpha = \omega^{\beta_1} \leqq \omega^{\gamma_1} \leqq \delta$. Jetzt nehmen wir an, daß $n = 4$. Wir haben Marke$(f(b_1)) = $ Marke$(b_1) = i$. Wegen der Lückenbedingung 4.1 (ii) ist $o(T_2^{f(b_1)})$ ein echter i-Subterm von δ. Mit Hilfe von 5.7.2 und der Eindeutigkeit der NF-Terme folgt $o(T_2^{f(b_1)}) < \delta$. Somit ist $\beta_1 = o(T_1^{b_1}) \leqq o(T_2^{f(b_1)}) < \delta$. Wegen 5.2.4 folgt $\alpha = \omega^{\beta_1} < \delta$.
IV. Falls $m = 4$, haben wir $\alpha = \Psi_i(\beta_1) \leqq \Psi_i(\gamma_1)$ und zwangsläufig $n = 4$, daher gilt $\Psi_i(\gamma_1) \leqq \delta$, somit $\alpha \leqq \delta$. □

5.10 Lemma. *Sind $o(T_1)$ und $o(T_2)$ definiert und Marke(Wurzel$(T_1)) = 0$ und $T_1 \leqq T_2$, so ist auch $o(T_1) \leqq o(T_2)$.*

Beweis. Wir setzen $a = \text{Wurzel}(T_1)$. Wegen 5.9 haben wir $o(T_1) = o(T_1^a) \leqq o(T_2^{f(a)})$. Außerdem Marke$(f(a)) = $ Marke$(a) = 0$, daher $o(T_2^{f(a)}) \leqq o(T_2)$ wegen 5.8. □

5.11 Lemma. *$\forall n(WQO(\mathcal{T}_{n+1}) \to WO(\Psi_0(\Omega_{n+1})))$ ist in ACA_0 beweisbar.*

Beweis. Wir argumentieren innerhalb von ACA_0. Sei $\langle \alpha_k : k < \omega \rangle$ eine beliebige Folge von NF-Termen $< \Psi_0(\Omega_{n+1})$. Gemäß Lemma 5.5 sei $\langle T_k : k < \omega \rangle$ eine entsprechende Folge markierter Bäume mit $T_k \in \mathcal{T}_{n+1}$, $o(T_k) = \alpha_k$, und Marke(Wurzel(T_k)) $= 0$ für jedes $k < \omega$. Nach der Voraussetzung $WQO(\mathcal{T}_{n+1})$ gibt es Indizes i und j mit $i < j$ und $T_i \leqq T_j$. Daher haben wir $\alpha_i \leqq \alpha_j$ nach 5.10. Somit ist $\langle \alpha_k : k < \omega \rangle$ keine absteigende Folge, d.h. $WO(\Psi_0(\Omega_{n+1}))$. □

5.12 Lemma. *$(\forall n\, WQO(\mathcal{T}_n)) \to WO(\Psi_0(\Omega_\omega))$ ist in ACA_0 beweisbar.*

Beweis. Klar, weil $\Psi_0(\Omega_\omega) = \sup\{\Psi_0(\Omega_n) : n < \omega\}$. □

5.13 Lemma (Buchholz). *$WO(\Psi_0(\Omega_\omega))$ ist in $\Pi_1^1 - CA_0$ nicht beweisbar.*

Beweis. Siehe [1, 4, 15, 29]. □

5.14 Satz (Friedman [9]). *$\forall n WQO(\mathcal{T}_n)$ ist in $\Pi_1^1 - CA_0$ nicht beweisbar.*

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus 5.13 und 5.12, weil $\Pi_1^1 - CA_0 \supseteqq ACA_0$. □

Genau wie in Abschnitt 3 können wir eine Π_2^0-endliche Miniaturisierung des Π_1^1-kombinatorischen Prinzips $\forall n\ WQO(\mathcal{T}_n)$ formulieren:

5.15 Definition. $LWQO(\mathcal{T}_n)$ ist die folgende Behauptung: Für jedes c gibt es eine so große Konstante k, daß es für jede endliche Folge $\langle T_0, T_1, \dots, T_k \rangle$, in der $T_i \in \mathcal{T}_n$ und $|T_i| \leqq c \cdot (i+1)$ für alle $i \leqq k$ gilt, Indizes i und j mit $i < j \leqq k$ und $T_i \leqq T_j$ gibt.

5.16 Satz (Friedman [9]). *Das Π_2^0-kombinatorische Prinzip $\forall n\, LWQO(\mathcal{T}_n)$ ist in $\Pi_1^1 - CA_0$ nicht beweisbar.*

Beweis. Genau wie für Satz 3.2. Außer 3.5 für $B = \Psi_0(\Omega_\omega)$ brauchen wir auch das beweistheoretische Ergebnis, daß $PRWO(\Psi_0(\Omega_\omega))$ in $\Pi_1^1 - CA_0$ nicht beweisbar ist. Siehe [1, 24 und 39]. □

LITERATUR

[1] Buchholz, W.: A new system of proof-theoretic ordinal functions, in Vorbereitung.
[2] Buchholz, W., Feferman, S., Pohlers, W., Sieg, W.: Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-Theoretical Studies, Lecture Notes in Math. **897**, Springer-Verlag, 1981, 383 Seiten.
[3] Buchholz, W., Schütte, K.: Ein Ordinalzahlensystem für die beweistheoretische Abgrenzung der Π_2^1-Separation und Bar-Induktion, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wiss., Math. Naturw. Klasse, 99–132 (1983).

[4] Buchholz, W., Schütte, K.: Proof Theoretic Ordinals of Impredicative Subsystems of Analysis, in Vorbereitung.
[5] Feferman, S.: Systems of predicative analysis. J. Symb. Logic. **29**, 1–30 (1964); **33**, 193–220 (1968).
[6] Friedman: Some systems of second order arithmetic and their use, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, 1974), **1**, Canadian Mathematical Congress, 235–242 (1975).
[7] Friedman, H.: Systems of second order arithmetic with restricted induction (abstracts). J. Symb. Logic **41**, 557–559 (1976).
[8] Friedman, H.: Independence results in finite graph theory I–VII, nicht veröffentlichte Manuskripte, Ohio State University, Februar–März 1981, 76 Seiten.
[9] Friedman, H.: Beyond Kruskal's theorem I–III, nicht veröffentlichte Manuskripte, Ohio State University, Juni–Juli 1982, 48 Seiten.
[10] Friedman, H., McAloon, K., Simpson, S.G.: A finite combinatorial principle which is equivalent to the 1-consistency of predicative analysis. Patras Logic Symposion (redigiert von G. Metakides), North-Holland, 197–230 (1982).
[11] Friedman, H., Simpson, S.G., Smith, R.L.: Countable algebra and set existence axioms. Annals of Pure and Applied Logic **25**, 141–181 (1983).
[12] Higman, G.: Ordering by divisibility in abstract algebras. Proc. Lond. Math. Soc. **2**, 326–336 (1952).
[13] Jäger, G.: ϱ-inaccessible ordinals, collapsing functions, and a recursive notation system. Arch. math. Logik **24**, 49–62 (1984).
[14] Jäger, G.: The strength of admissibility without foundation. J. Symb. Logic **49**, 233–245 (1984).
[15] Jäger, G., Pohlers, W.: Admissible Proof Theory. Springer-Verlag (in Vorbereitung)
[16] Kirby, L., Paris, J.: Accessible independence results for Peano arithmetic. Bull. Lond. Math. Soc. **14**, 285–293 (1982).
[17] König, D.: Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche. Acta Litterarum ac Scientarum (Ser. Sci. Math.) Szeged **3**, 121–130 (1927).
[18] Kruskal, J.: Well-quasi-ordering, the three theorem, and Vázsonyi's conjecture. Trans. Am. Math. Soc. **95**, 210–225 (1960).
[19] Laver, R.: Well-quasi-orderings and sets of finite sequences. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **79**, 1–10 (1976).
[20] Laver, R.: Better-quasi-orderings and a class of trees, Studies in Foundations and Combinatorics. Adv. Math. Suppl. Stud. **1**, 31–48 (1978).
[21] Mader, W.: Wohlquasigeordnete Klassen endlicher Graphen. J. Comb. Theory B **12**, 105–122 (1972).
[22] Nash-Williams, C.St.J.A.: On well-quasi-ordering finite trees. Proc. Cambridge Phil. Soc. **59**, 833–835 (1963).
[23] Paris, J., Harrington, L.: A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. Handbook of Mathematical Logic (redigiert von J. Barwise). North-Holland, 1133–1142 (1977).
[24] Pohlers, W.: An upper bound for the probability of transfinite induction in systems with n-times iterated inductive definitions. Proof Theory Symposium (Kiel 1974). Lecture Notes in Mathematics **500**, 271–289, Springer-Verlag 1975.
[25] Ramsey, F.P.: On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc. **30**, 264–286 (1930).
[26] Schmerl, J.H., Simpson, S.G.: On the role of Ramsey quantifiers in first order arithmetic. J. Symb. Logic **47**, 423–435 (1982).
[27] Schmidt, D.: Well-partial orderings and their maximal order types. Habilitationsschrift, Heidelberg, 1979, 77 Seiten.
[28] Schütte, K.: Predicative well-orderings. Formal Systems and Recursive Functions (redigiert von J. Crossley und M. Dummett) 280–303. North-Holland 1965.
[29] Schütte, K.: Proof Theory, 299 Seiten. Springer-Verlag 1977.

[30] Shelah, S.: On logical sentences in PA, Frühjahr 1983, 15 Seiten.
[31] Simpson, S.G.: BQO theory and Fraisse's conjecture, Kapitel 9 von: R. Mansfield und G. Weitkamp, Descriptive Set Theory. Oxford Logic Guides, 127 Seiten (1985).
[32] Simpson, S.G.: Σ_1^1 and Π_1^1 transfinite induction. Logic Colloquium '80 (redigiert von D. van Dalen, D. Lascar und J. Smiley), pp. 239–253. North-Holland 1982.
[33] Simpson, S.G.: Set theoretic aspects of ATR_0. Logic Colloquium '80 (redigiert von D. van Dalen, D. Lascar und J. Smiley), pp. 254–271. North-Holland 1982.
[34] Simpson, S.G.: Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations? J. Symb. Logic **49**, 361–380 (1984).
[35] Simpson, S.G.: Reverse Mathematics. Proceedings of the AMS Summer Institute in Recursion Theory (redigiert von A. Nerode und R. Shore). Proc. Symp. Pure Math. **42**, 461–471 (1985).
[36] Simpson, S.G.: Subsystems of Second Order Arithmetic (in Vorbereitung).
[37] Steel, J.: Determinateness and subsystems of analysis. Ph. D. Thesis, pp. 107. Berkeley 1976.
[38] Takeuti, G.: Ordinal diagrams. J. Math. Soc. Jpn. **9**, 386–394 (1957); **12**, 385–391 (1960).
[39] Takeuti, G.: Proof Theory, 372 Seiten. North-Holland 1975.
[40] Takeuti, G.: Two Applications of Logic to Mathematics. Iwanami Shoten und Princeton University Press, 139 Seiten. (1978).

Stephen G. Simpson
Department of Mathematics
Pennsylvania State University
University Park
PA 16802
USA